Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)
Final Event 1 (Group)
香港数学竞赛 (2011 / 2012)
决赛项目 1 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 求 2011^{2011} 的十位数。

Calculate the tens digit of 2011^{2011}.

2. 设 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 为一等差级数，公差是 1 及 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 2012$。如果 $P = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}$，求 P 的值。

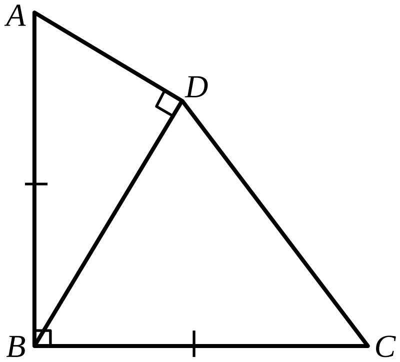
Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an arithmetic progression with common difference 1 and $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 2012$. If $P = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}$, find the value of P.

3. 若 $90!$ 可被 10^k 整除，当中 k 是正整数，求 k 的最大可能值。

If $90!$ is divisible by 10^k, where k is a positive integer, find the greatest possible value of k.

4. 在图一中，ΔABC 是一直角三角形且 $AB \perp BC$。若 $AB = BC$，$AD = 5$ 及 $BD = 8$，求 ΔBCD 的面积的值。

In Figure 1, ΔABC is a right-angle triangle with $AB \perp BC$. If $AB = BC$, $AD = 5$ and $BD = 8$, find value of the area of ΔBCD.



图一

Figure 1

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 2 (Group)

香港数学竞赛 (2011 / 2012)

决赛项目 2 (团体)

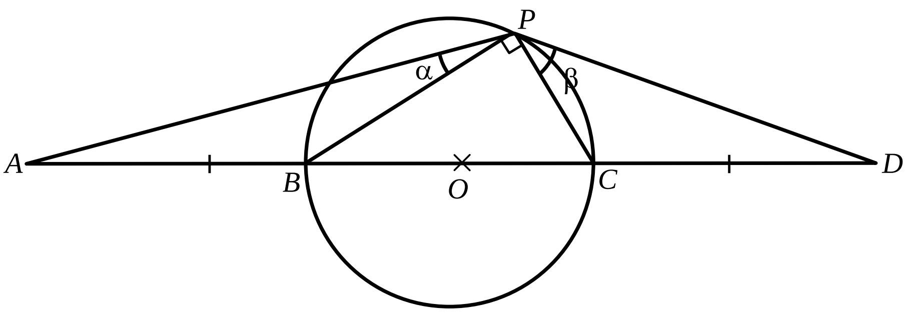
除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 求 $2\times\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 87^\circ\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$ 的值。
Find the value of $2\times\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 87^\circ\times\tan 88^\circ\times\tan 89^\circ$.

2. 若方程 $\left(x^2-3x+2\right)^2-3\left(x^2-3x\right)-4=0$ 有 K 个整数解，求 K 的值。
If there are K integers that satisfy the equation $\left(x^2-3x+2\right)^2-3\left(x^2-3x\right)-4=0$, find the value of K.

3. 若 ℓ 为 $|x-2|+|x-47|$ 的最小值，求 ℓ 的值。
If ℓ be the minimum value of $|x-2|+|x-47|$, find the value of ℓ.

4. 在图一，圆有直径 BC，圆心在 O，P、B 及 C 皆为圆周上的点。若 $AB=BC=CD$ 及 AD 为一线段，$\alpha=\angle APB$ 及 $\beta=\angle CPD$，求 $(\tan\alpha)(\tan\beta)$ 的值。
In Figure 1, P, B and C are points on a circle with centre O and diameter BC. If $AB=BC=CD$ and AD is a line segment, $\alpha=\angle APB$ and $\beta=\angle CPD$, find the value of $(\tan\alpha)(\tan\beta)$.



图一

Figure 1

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 3 (Group)

香港数学竞赛 (2011 / 2012)

决赛项目 3 (团体)

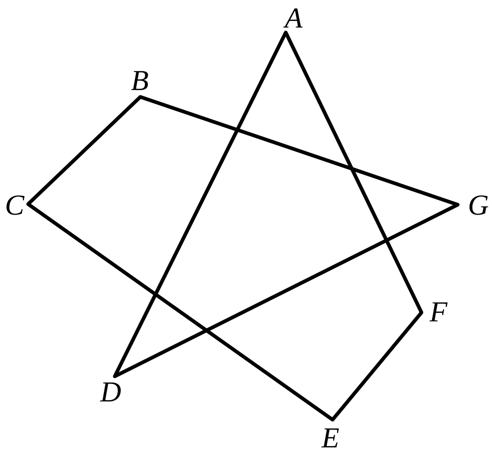
除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 设 $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$， $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ 及 $192z=x^4+y^4+(x+y)^4$，求 z 的值。

Let $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ and $192z=x^4+y^4+(x+y)^4$, find the value of z.

2. 在图一中，AD、DG、GB、BC、CE、EF 及 FA 都是线段。若 $\angle FAD+\angle GBC+\angle BCE+\angle ADG+\angle CEF+\angle EFA+\angle DGB=r°$，求 r 的值。

In Figure 1, AD, DG, GB, BC, CE, EF and FA are line segments. If $\angle FAD+\angle GBC+\angle BCE+\angle ADG+\angle CEF+\angle EFA+\angle DGB=r°$, find the value of r.



图一

Figure 1

3. 设 k 为正整数及函数 $f(k)$ 的定义是若 $\frac{k-1}{k}=0.k_1k_2k_3\ldots\ldots$，则 $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$，例如 $f(3)=666$ 因为 $\frac{3-1}{3}=0.666\ldots\ldots$，求 $D=f\left(f\left(f\left(f\left(f(112)\right)\right)\right)\right)$ 的值。

Let k be a positive integer and $f(k)$ a function that if $\frac{k-1}{k}=0.k_1k_2k_3\ldots\ldots$, then $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$, for example, $f(3)=666$ because $\frac{3-1}{3}=0.666\ldots\ldots$, find the value of $D=f\left(f\left(f\left(f\left(f(112)\right)\right)\right)\right)$.

4. 若 f 为一整数值函数，其定义为 $F_n(k)=F_1\left(F_{n-1}(k)\right)$，$n\geq 2$ 且 $F_1(k)$ 是 k 的所有位数的平方之和，求 $F_{2012}(7)$ 的值。

If f is an integer-valued function defined recursively by $F_n(k)=F_1\left(F_{n-1}(k)\right)$ for $n\geq 2$ where $F_1(k)$ is the sum of the squares of the digits of k, find the value of $F_{2012}(7)$.

Hong Kong Mathematics Olympiad (2011 / 2012)

Final Event 4 (Group)

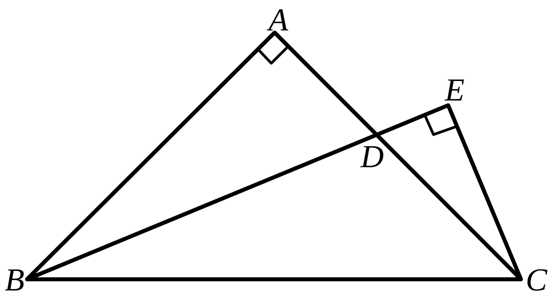
香港数学竞赛 (2011 / 2012)

决赛项目 4 (团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在图一中，ABC 及 EBC 是两个直角三角形，$\angle BAC=\angle BEC=90°$，$AB=AC$ 及 EDB 为 $\angle ABC$ 的角平分线。求 $\dfrac{BD}{CE}$ 的值。

In figure 1, ABC and EBC are two right-angle triangles, $\angle BAC=\angle BEC=90°$, $AB=AC$ and EDB is the angle bisector of $\angle ABC$. Find the value of $\dfrac{BD}{CE}$.



图一

Figure 1

2. 若 $Q>0$ 并满足 $\left|3Q-\left|1-2Q\right|\right|=2$， 求 Q 的值。

If $Q>0$ and satisfies $\left|3Q-\left|1-2Q\right|\right|=2$, find the value of Q .

3. 设 $xyzt=1$。若 $R=\frac{1}{1+x+xy+xyz}+\frac{1}{1+y+yz+yzt}+\frac{1}{1+z+zt+ztx}+\frac{1}{1+t+tx+txy}$，求 R 的值。

Let $xyzt=1$. If $R=\frac{1}{1+x+xy+xyz}+\frac{1}{1+y+yz+yzt}+\frac{1}{1+z+zt+ztx}+\frac{1}{1+t+tx+txy}$, find the value of R.

4. 若 x_1、x_2、x_3、x_4 与 x_5 为正整数并满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$，即是，五数之和等于五数之乘积，求 x_5 的最大值。

If x_1, x_2, x_3, x_4 and x_5 are positive integers that satisfy $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$, that is, the sum is the product, find the maximum value of x_5.